Chapitre 3

DYNAMIQUE DES FLUIDES

INCOMPRESSIBLES PARFAITS

1. INTRODUCTION

Les équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits, en particulier :

- l'équation de continuité (conservation de la masse),
- le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie),
- le théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement) à partir duquel on établit les équations donnant la force dynamique exercée par les fluides en mouvement (exemple les jets d'eau).

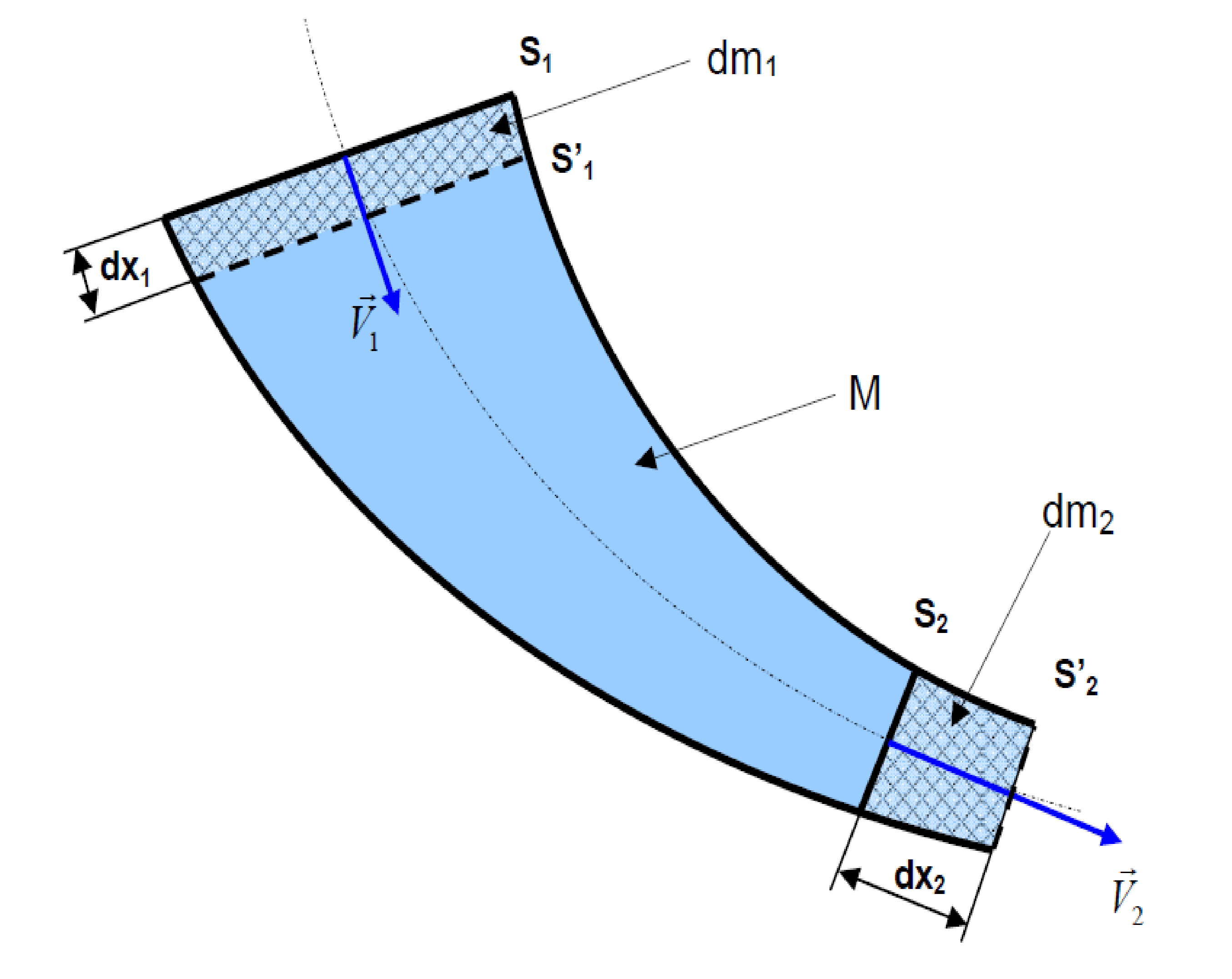
2. ECOULEMENT PERMANENT

L'écoulement d'un fluide est dit permanent si le champ des vecteurs vitesse des particules fluides est constant dans le temps.

Notons cependant que cela ne veut pas dire que le champ des vecteurs vitesse est uniforme dans l'espace.

3. EQUATION DE CONTINUITE

Considérons une veine d'un fluide incompressible de masse volumique ϱ animée d'un écoulement permanent.


S1
dm1
S'1
dx1
V1
M
dm2
S2
S'2
dx2
V2

On désigne par :

- S_1 et S_2 respectivement la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t,

- S'_1 et S'_2 respectivement les sections d'entrée et de sortie du fluide à l'instant $t'=(t+dt)$,

- V_1 et V_2 les vecteurs vitesse d'écoulement respectivement à travers les sections S_1 et S_2 de la veine.

- dx_1 et dx_2 respectivement les déplacements des sections S_1 et S_2 pendant l'intervalle de temps dt,

- dm_1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S_1 et S'_1,

- dm_2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S_2 et S'_2,

- dV_1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections S_1 et S'_1,

- dV_2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S_2 et S'_2,

A l'instant t : le fluide compris entre S_1 et S_2 a une masse égale à $(dm_1+ M)$

A l'instant t+dt : le fluide compris entre S'1 et S'2 a une masse égale à (M+ dm2).

Par conservation de la masse: $dm_1 + M = M + dm_2$ en simplifiant par M on aura

$dm_1 = dm_2$ Donc $\rho_1 . dV_1 = \rho_2 . dV_2$ ou encore $\rho_1 . S_1 . dx_1 = \rho_2 . S_2 . dx_2$,

En divisant par dt on abouti à :

$$\rho_1 . S_1 . \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 . S_2 . \frac{dx_2}{dt} \Leftrightarrow \rho_1 . S_1 . V_1 = \rho_2 . S_2 . V_2$$

Puisque $\rho_1 = \rho_2 = \rho.$ On peut simplifier et aboutir à l'équation de continuité suivante :

$$\boxed{S_1 . V_1 = S_2 . V_2} \quad (1)$$

4. NOTION DE DEBIT

4.1 Débit massique

Le débit massique d'une veine fluide est $dm\ /dt$.

$$q_m = \frac{dm}{dt}$$

où :

- qm est la masse de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.

- dm : masse élémentaire en (kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps dt .

- dt : intervalle de temps en (s)

En tenant compte des équations précédentes on obtient :

$$\boxed{q_m = \frac{dt}{dm} = \rho_1 . S_1 . \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 . S_2 . \frac{dx_2}{dt}} \qquad (2)$$

avec :

$\frac{dx1}{dt}$=V1=$\left\|\overrightarrow{V_1}\right\|$: Vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers S1,

$\frac{dx_2}{dt}$=V_2=$\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|$: Vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers S2,

D'après (2) :

$q_m=\rho_1 . S_1 . V_1 = \rho_2 . S_2 . V_2$ Soit dans une section droite quelconque S de la veine fluide à travers laquelle le fluide s'écoule à la vitesse moyenne v :

$$\boxed{q_m = \rho . S . V} \quad (3)$$

où :

q_m : Débit massique en (kg/s)

ρ : Masse volumique en (kg/m^3)

S : Section de la veine fluide en (m^2)

V : Vitesse moyenne du fluide à travers (S) en (m/s)

4.2 Débit volumique

Le débit volumique d'une veine fluide est le rapport de $\frac{dV}{dt}$

$$\boxed{q_v = \frac{dV}{dt}}$$

Où :

- q_v : Volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.
- dV : Volume élémentaire, en (m^3), ayant traversé une surface S pendant un intervalle de temps dt,
- dt : Intervalle de temps en secondes (s),

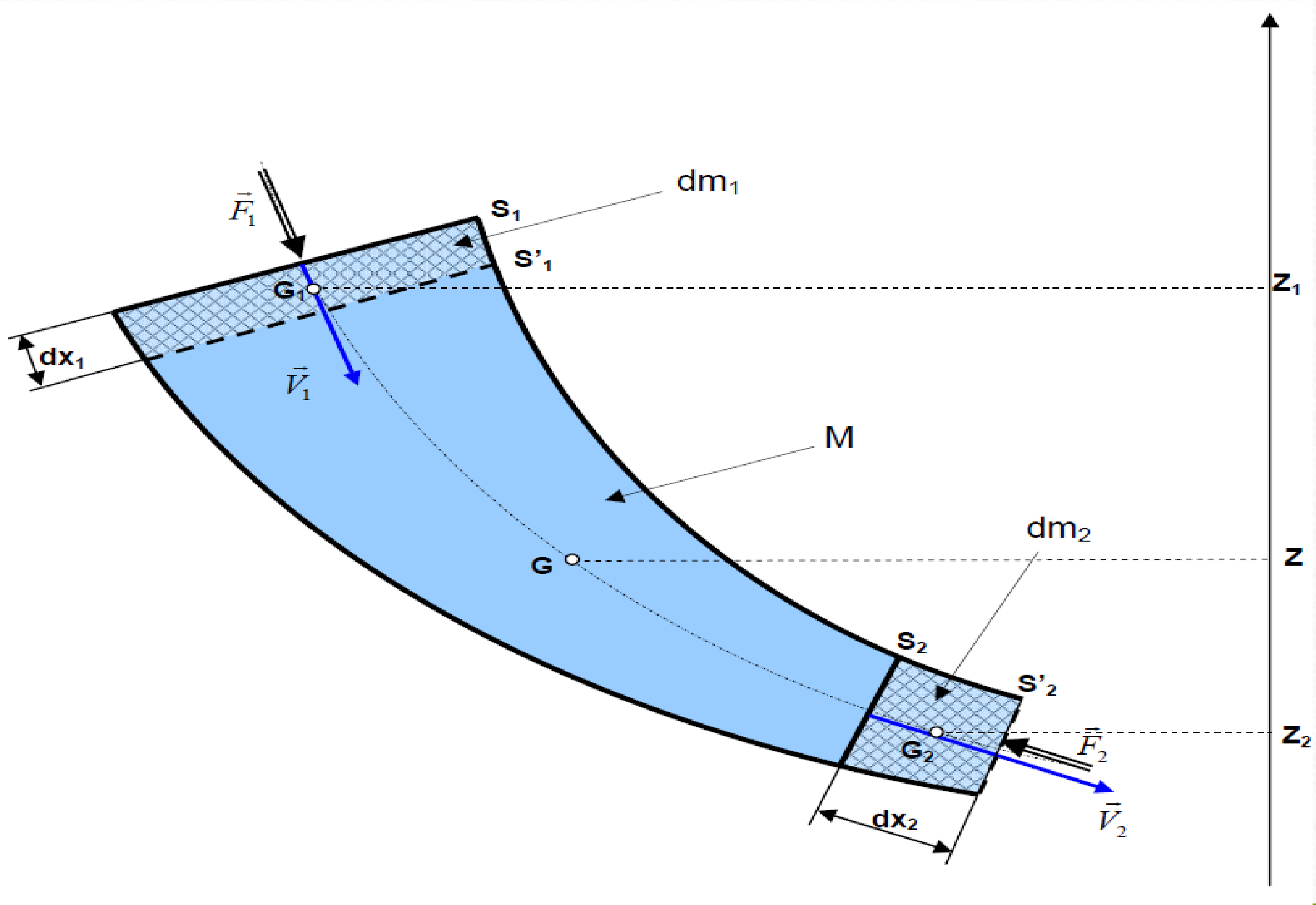
D'après la relation (3) et en notant que dV=$\frac{dm}{\rho}$

On peut écrire également que $q_v = \frac{q_m}{\rho}$

D'où

$$\boxed{q_v = S.V}$$

5. THEOREME DE BERNOULLI – CAS D'UN ECOULEMENT SANS ECHANGE DE TRAVAIL



A l'instant t le fluide de masse (dm1 + M) est compris entre S_1 et S_2. Son énergie mécanique est :

$$E_{mec} = Ep_{ot} + Ec_{in} = dm_1 g Z_1 + MgZ + \frac{1}{2} dm_1 V_1^2 + \int_{s'1}^{s1} \frac{dmV^2}{2}$$

A l'instant t'=(t+dt) le fluide de masse ($M+dm_2$) est compris entre $_{S'1}$ et S'_2. Son énergie mécanique est :

$$E'_{mec} = {}_{E'}p_{ot} + {}_{E'}c_{in} = MgZ + dm_2 g Z_2 + \int_{s'1}^{s1} \frac{dm\,V^2}{2} + \frac{1}{2} dm_2 V_2^2$$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' : « La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures. »

$$E'_{mec} - E_{\ mec} = W_{\ forces\ de\ pression} = F_1 d_{x1} - F_2 d_{x2} \Leftrightarrow E_{mec} - E'_{mec} = P_1 . S_1 . dx_1 - P_2 . S_2 . dx_2 = P_1 . dV_1 - P_2 . dV_2$$

en simplifiant on obtient : $dm_2 g Z_2 - dm_1 g Z_1 + \frac{1}{2} dm_2 V_2^2 - \frac{1}{2} dm_1 V_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1} dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2} dm_2$

Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$ et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$,
On aboutie à l'équation de Bernoulli :

$$\frac{V_2^2 - V_2^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = 0 \qquad (4)$$

L'unité de chaque terme de la relation (4) est le joule par kilogramme (J/kg).

6. THEOREME DE BERNOULLI – CAS D'UN ECOULEMENT AVEC ECHANGE DE TRAVAIL

Reprenons le schéma de la veine fluide du paragraphe 4 avec les mêmes notations et les mêmes hypothèses. On suppose en plus qu'une machine hydraulique est placée entre les sections S_1 et S_2. Cette machine est caractérisée par une puissance nette P_{net} échangée avec le fluide, une puissance sur l'arbre P_a et un certain rendement η. Cette machine peut être soit une turbine soit une pompe.

- Dans le cas d'une pompe : le rendement est donné par l'expression suivante :

$$\eta = P_{net}/P_a$$

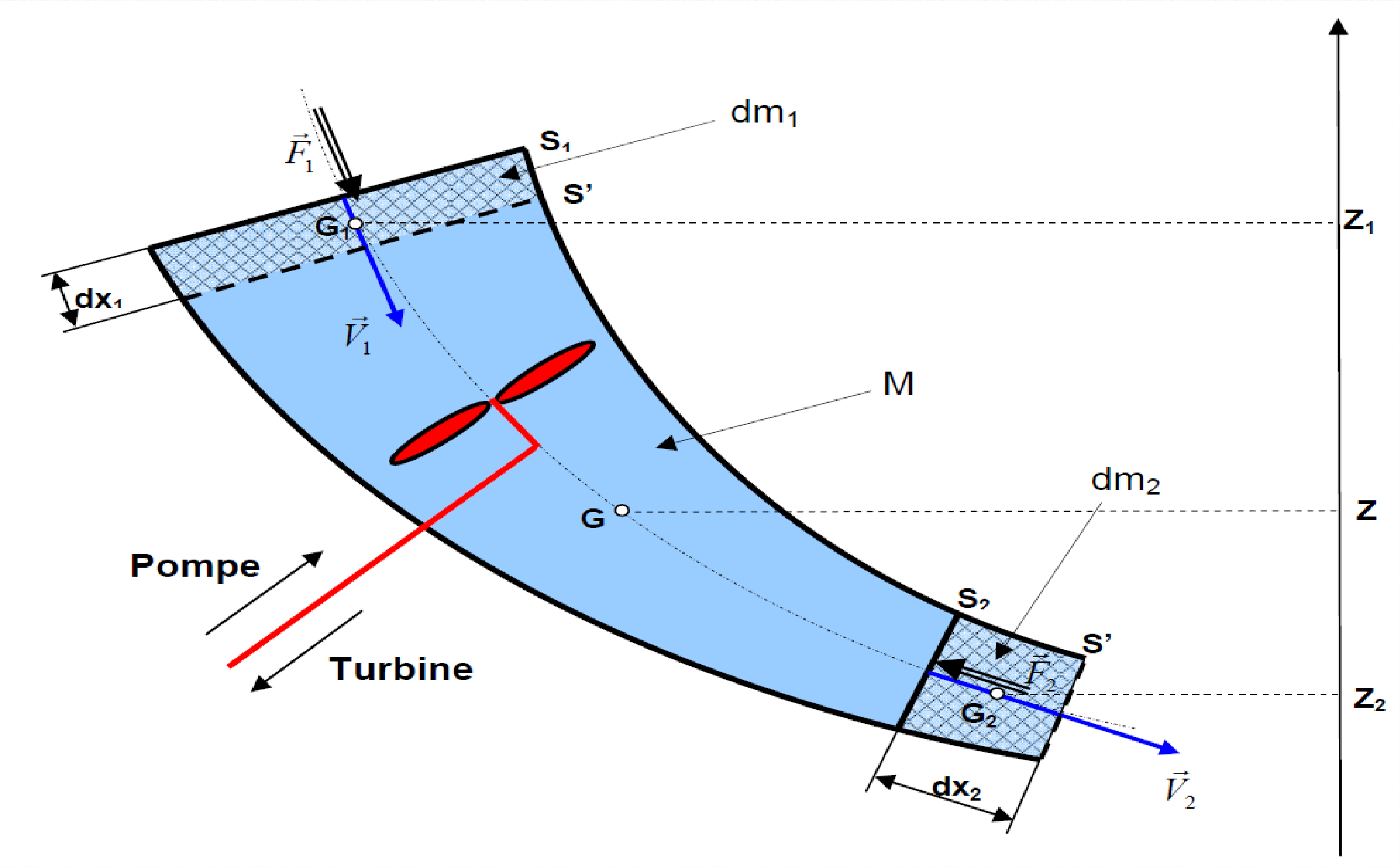
- Dans le cas d'une turbine : le rendement est donné par l'expression suivante :

$$\eta = P_a/P_{net}$$

Entre les instant t et $t' = (t + dt)$, le fluide a échange un travail net $W_{net} = P_{net}.dt$ avec la machine hydraulique. W_{net} est supposé positif s'il s'agit d'une pompe et négatif s'il s'agit d'une turbine.

On désigne par F1 et F2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S1 et S2.
A l'instant t le fluide de masse (dm1 + M) est compris entre S1 et S2. Son énergie mécanique est :

$$E_{mec} = Ep_{ot} + Ec_{in} = dm_1 g Z_1 + MgZ + \frac{1}{2} dm_1 V_1^2 + \int_{s'1}^{s1} \frac{dmV^2}{2}$$



dm1
S1
S'
$\vec{F}_1$
G1
Z1
dx1
$\vec{V}_1$
M
dm2
G
Z
Pompe
Turbine
S2
S'
$\vec{F}_2$
G2
Z2
dx2
$\vec{V}_2$

A l'instant t'=(t+dt) le fluide de masse (M+dm2) est compris entre S'1 et S'2. Son énergie mécanique est :

$$E'_{mec} = E'p_{ot} + E'c_{in} = MgZ + dm_2 g Z_2 + \int_{s'1}^{s1} \frac{dm\,V^2}{2} + \frac{1}{2} dm_2 V_2^2$$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' :« La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures. »,en considérant cette fois ci le travail de la machine hydraulique

$E'_{mec} - E_{mec} = F_1 d_{x1} - F_2 d_{x2} + P_{net} . dt = P_1 . dV_1 - P_2 . dV_2 + P_{net} . dt$ en simplifiant on aura :

On aboutie à l'équation de Bernoulli : $\frac{V_2^2 - V_2^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = \frac{P_{net}}{q_m}$ (5)

7. THEOREME D'EULER :

Une application directe du théorème d'Euler est l'évaluation des forces exercées par les jets d'eau. Celles-ci sont exploitées dans divers domaines : production de l'énergie électrique à partir de l'énergie hydraulique grâce aux turbines, coupe des matériaux, etc.

Le théorème d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement à l'écoulement d'un fluide :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{\overrightarrow{dp}}{dt}$$; avec $\vec{P} = m\vec{V}_G$: quantité de mouvement.

Ce théorème permet de déterminer les efforts exercés par le fluide en mouvement sur les objets qui les environnent.

- ***<u>Enoncé</u>***

La résultante ($\Sigma Fext$) des actions mécaniques extérieures exercées sur un fluide isolé (fluide contenu dans l'enveloppe limitée par S1 et S2) est égale à la variation de la quantité de mouvement du fluide qui entre en S1 à une vitesse $\vec{V}1$ et sort par S2 à une vitesse $\vec{V}2$.

$$\sum \vec{F}_{ext} = q_m\,(\overrightarrow{V_2 - V_1})$$